

PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B

SKRIPSI



**UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A**

Disusun Oleh
RIF'A ATUL HASANAH
H02216014

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL
SURABAYA**

2019

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama : RIF'A ATUL HASANAH

NIM : H02216014

Program Studi : Matematika

Angkatan : 2016

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, Desember 2019

Yang menyatakan,



RIF'A ATUL HASANAH
NIM. H02216014

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama : RIF'A ATUL HASANAH

NIM : H02216014

Judul Skripsi : PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT
HEPATITIS B

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, Desember 2019

Pembimbing



Putroue Keumala Intan, M.Si
NIP. 198805282018012001

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama : RIF'A ATUL HASANAH
NIM : H02216014
Judul Skripsi : PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT
HEPATITIS B

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal Desember 2019

Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I


Putrouc Keumala Intan, M.Si
NIP. 198805282018012001

Penguji II


Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si
NIP. 198002042014031001

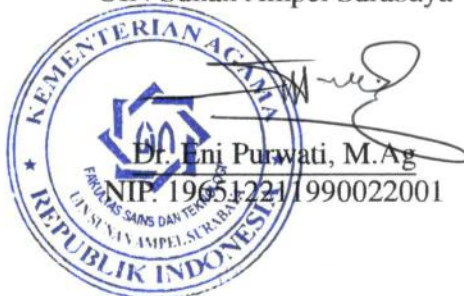
Penguji III


Yuniar Farida, MT
NIP. 197905272014032002

Penguji IV


Dian C Rini Novitasari, M.Kom
NIP. 198511242014032001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya





KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN

Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax. 031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : RIF'A ATUL HASANAH
NIM : 402216019
Fakultas/Jurusan : SAINTEK / MATEMATIKA
E-mail address : rifa.hasanah15@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :

☒ Skripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (.....)
yang berjudul :

PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara *fulltext* untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 03 Januari 2020

Penulis

(RIF'A ATUL HASANAH)
nama terang dan tanda tangan

ABSTRACT

SEIV MODEL OF TRANSMISSION HEPATITIS B

Modelling of disease is something that can help in the transmissions of the disease. In this study, disease modelling was carried out on hepatitis B. Hepatitis B is a hepatitis disease that will affect morbidity, mortality, life expectancy, health status and other socio-economic impacts. Modelling hepatitis B uses the SEIV model in which the population will be divided into 4 populations *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* and *Vaccinated*. This study aims to determine the stability of the equilibrium point and the presence of bifurcation in the model. The results of this study obtained a value of endemic equilibrium points $xi_1 = (285715, 13787, 3256488, 395351)$ with $R_0 = 3.9630 > 1$, it can be concluded that hepatitis B will be endemic in Jember Regency, which means that over time the hepatitis B disease in Jember will continue to exist accompanied by a population of textit Infected which continues to exist even though the number of populations that have been vaccinated is more than the number of infected populations, then the results of the analysis of the existence of bifurcation conducted can be concluded that there is no bifurcation in this SEIV model, because bifurcation occurs in non-linear functions, while the function obtained is linear function.

Keywords: SEIV Model, Hepatitis B, Fourth Order Runge Kutta, Stability, Bifurcation

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR LAMBANG	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Rumusan Masalah	6
1.3. Tujuan Penelitian	6
1.4. Manfaat Penelitian	7
1.5. Batasan Masalah	7
1.6. Sistematika Penulisan	7
II TINJAUAN PUSTAKA	9
2.1. Hepatitis B	9
2.2. Persamaan Diferensial	11
2.2.1. Persamaan Diferensial Biasa	11
2.2.2. Persamaan Diferensial Parsial	11
2.3. Nilai Eigen	12
2.4. Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium)	13

2.5. Kestabilan	14
2.6. Linearisasi	16
2.7. Kriteria Kestabilan <i>Routh Hurwitz</i>	18
2.8. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	19
2.9. Model Epidemi	20
2.9.1. Model Epidemi SIR	20
2.9.2. Model SIR dengan Vaksinasi	21
2.9.3. Model Epidemi SEIR	22
2.10. Model SEIV	23
2.11. Bifurkasi	26
2.12. Runge Kutta Orde Empat	31
III METODE PENELITIAN	33
3.1. Jenis Penelitian	33
3.2. Data dan Sumber Data Penelitian	33
3.3. Parameter	34
3.4. Rancangan Penelitian	36
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	39
4.1. Titik Keseimbangan	39
4.1.1. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	41
4.1.2. Titik Keseimbangan Endemik	43
4.2. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	45
4.3. Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan	47
4.3.1. Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	49
4.3.2. Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik	52
4.4. Analisis Keberadaan Bifurkasi	55
4.5. Solusi Numerik dan Simulasi	56
V PENUTUP	65
5.1. Kesimpulan	65
5.2. Saran	65
DAFTAR PUSTAKA	67

Pengendalian penyakit hepatitis B lebih dimungkinkan melalui upaya pencegahan dibandingkan dengan pengobatan yang masih dalam penelitian. Upaya pencegahan dengan imunisasi diberikan dengan cara memberikan vaksin, yaitu suatu bahan antigenik yang dapat menghasilkan kekebalan aktif terhadap suatu penyakit agar dapat mencegah pengaruh infeksi oleh suatu organisme, kedalam tubuh seseorang (Nugroho, 2009). Vaksin hepatitis B dapat mencegah hepatitis B dan penyakit yang disebabkan oleh hepatitis B, seperti kanker hati dan sirosis hati (The Immunization Action Coalition, 2018). Penderita penyakit hepatitis B telah memiliki kekebalan tubuh alami tetapi masih rentan terhadap penyakit itu kembali lagi atau menjadi parah. Namun dengan pemberian vaksin, pada individu yang rentan akan memperoleh tambahan imunitas untuk kekebalan tubuh sehingga jika nantinya individu tersebut terjangkit penyakit hepatitis B tidak akan parah. WHO menyatakan bahwa pemberian vaksin hepatitis B tidak akan menyembuhkan pembawa virus (*carrier*) yang kronis, tetapi pemberian vaksin diyakini 95 % efektif untuk mencegah berkembangnya penyakit menjadi *carrier* (Siregar, 2003).

[illegible]

Proses pemodelan matematika penyebaran suatu penyakit, dilakukan dengan cara mencari titik kesetimbangan (ekuilibrium). Titik kesetimbangan dibagi menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit, yang merupakan suatu kondisi dimana sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang seseorang atau tidak ada individu yang terinfeksi penyakit dan titik kesetimbangan endemik, yang merupakan suatu kondisi dimana penyakit selalu ada dan mewabah dalam populasi tersebut (selalu ada individu yang terinfeksi penyakit). Kemudian mencari bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai penentu apakah suatu penyakit akan menetap atau tidak dalam suatu populasi. Setelah itu perlu dilakukan analisis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut karena dari analisis tersebut dapat menunjukkan apakah penyakit tersebut akan endemik pada populasi atau tidak, kemudian dilanjutkan dengan menyelidiki kemungkinan terjadinya bifurkasi. Analisis bifurkasi yaitu analisis perubahan kestabilan pada suatu sistem terhadap titik ekuilibrium yang dipengaruhi oleh perubahan suatu parameter tertentu (Robbi, 2018). Pada kenyataannya ada beberapa faktor yang mempengaruhi berubahnya sebuah kestabilan sistem, perubahan tersebut mengakibatkan sebuah permasalahan baru yang menjadikan sistem yang telah dibentuk tidak bekerja dengan maksimal. Analisis bifurkasi ini bertujuan untuk meminimalkan terjadinya

Penularan penyakit hepatitis B dapat ditafsirkan ke dalam persamaan matematika. Pemodelan matematika pada penularan hepatitis B telah dikaji oleh Syafruddin Side pada tahun 2015 dengan menggunakan model epidemik SEIR, yaitu membagi kelompok populasi menjadi empat bagian yaitu *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* dan *Recovered* (SEIR). Infeksi virus hepatitis B juga dapat dimodelkan dengan menggunakan model *Suspected*, *Infected* dan *Recovered* (SIR) (Larasati & Tjahjana, 2012). Seorang penderita hepatitis B jika diberikan vaksin akan menambah kekebalan pada tubuhnya. Salah satu bentuk pemodelan matematika dalam merepresentasikan penyakit dengan pengaruh vaksinasi adalah model epidemi SEIV, yang mana populasi akan terbagi menjadi 4 populasi, yaitu populasi rentan (*Susceptible*), populasi terinkubasi (*Exposed*), populasi terinfeksi (*Infected*) dan populasi tervaksin (*Vaccinated*) (Sulisdiana, 2016). Model SEIV juga pernah digunakan untuk mengetahui penyebaran penyakit polio (Umam, 2014). Pemodelan penyakit hepatitis B ini bertujuan untuk mengetahui perkembangan dan mengetahui cara meminimalisirnya. Pada penelitian yang dilakukan oleh Kurnia Nur Pratama pada Tahun 2014 yang berjudul Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIV (*Susceptible-Exposed-Infected-Vaccinated*) pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B di Kabupaten Jember, mengkaji tentang model SEIV hepatitis B untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar agar dapat diketahui perilaku penyebaran penyakit hepatitis B (Pratama, 2014). Pada penelitian tersebut pada laju pertumbuhan populasi rentan (*Susceptible*) yang mana

Berdasarkan latar belakang diatas, maka peneliti akan melakukan analisis kestabilan dan analisis bifurkasi pada model epidemik SEIV penyebaran penyakit hepatitis B dengan menggunakan model pada penelitian (Pratama, 2014).

Berdasarkan uraian latar belakang diatas, maka dapat diambil beberapa pokok permasalahan, yaitu:

- ### 1.3. Tujuan Penelitian

- [illegible]

menyerang anak-anak daripada orang dewasa karena daya tahan tubuh anak-anak relatif lebih lemah dibandingkan orang dewasa.

Masa inkubasi virus hepatitis B rata-rata 60-90 hari. Durasi masa inkubasi ini bergantung pada banyaknya virus dalam tubuh penderita, cara penularan, faktor umur, jenis kelamin, kebiasaan hidup maupun pekerjaan. Faktor yang paling berpengaruh terhadap parahnya infeksi hepatitis B yaitu jumlah virus dan usia individu (Depkes RI, 2002). Hepatitis B biasanya ditularkan dari orang ke orang melalui transfusi darah yang terkontaminasi virus hepatitis B, cairan tubuh, hubungan seksual, transmisi perinatal dan peralatan yang telah mengandung cairan tubuh penderita yang terkontaminasi hepatitis B (Notoatmojo, 2004).

Prosentasi infeksi hepatitis B berkembang menjadi kronis pada bayi saat lahir sebesar 90 % dan pada anak usia 1-5 tahun sebesar 30-60 % serta usia dewasa 2-6 % (CDC, 2005). Penularan virus hepatitis B sebesar 21 % terjadi secara perinatal, 48 % pada awal masa kanak-kanak dan 31 % remaja atau orang dewasa (Brauer, van de Driessche, Wu, 2008). Hasil dari beberapa studi menunjukkan bahwa sebesar 90 % bayi yang lahir dari ibu positif pengidap HBsAg dan tidak diimunisasi Hepatitis B maka akan menjadi pengidap kronis. Pemberian imunisasi Hepatitis B pada bayi umur 0-7 hari dosis pertama maka prosentasenya akan berubah menjadi hanya sekitar 23 % yang akan menjadi pengidap kronis. Jika pemberian imunisasi dilakukan pada bulan pertama kelahiran maka prosentasenya akan berubah menjadi sekitar 40 % yang akan menjadi pengidap kronis (Beasley, 1998). Efektivitas proteksi sebesar 85-95 % dalam mencegah infeksi virus hepatitis B apabila pemberian imunisasi dalam waktu 12 jam setelah lahir (Satgas Imunisasi-Ikatan Dokter Anak Indonesia, 2005). Imunisasi merupakan suatu cara untuk menimbulkan atau meningkatkan kekebalan tubuh seseorang secara aktif

2.2. Persamaan Diferensial

2.2.1. Persamaan Diferensial Biasa

1. $\frac{dx}{dt} + 4tx = \sin t$
2. $\frac{du}{dt} = e^t$

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh :

$$2. \quad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0$$

Misalkan A merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol x dalam R^n disebut vektor eigen dari matriks A , dan jika Ax merupakan kelipatan skalar dari x , maka untuk suatu skalar λ , $Ax = x\lambda$, yang mana λ ini merupakan nilai eigen dari matriks A , dan x merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . Untuk mencari nilai eigen dari matriks A , maka $Ax = \lambda x$ dikalikan dengan matriks identitas I , dapat ditulis menjadi $(\lambda I - A)x = 0$, λ akan menjadi nilai eigen jika dan hanya jika persamaan memiliki pemecahan tak nol, dapat ditulis sebagai

persamaan tersebut merupakan persamaan karakteristik dari matriks A , skalar persamaan tersebut adalah nilai eigen dari matriks A . Determinan $(\lambda I - A)$, merupakan polinom λ yang disebut polinom karakteristik dari matriks A (Anton, 1998) Jika salah satu akar polinom karakteristik bernilai nol dan akar lainnya bernilai positif maka sistem non linear tak stabil. Jika salah satu akar polinom karakteristik bernilai nol dan akar lainnya bernilai negatif maka sistem non linear dapat stabil atau tidak stabil bergantung pada unsur non linear yang diabaikan (Campbell & Haberman, 2008)

Kestabilan suatu sistem dapat diketahui dengan penyelidikan melalui pemberian suatu nilai awal yang terletak pada persekitaran titik ekuilibrium.

$$f(\bar{x}) = 0$$
$$\dot{x}_1 = x_1x_2 - 2x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 - x_2$$

$$x_1x_2 - 2x_1 = 0$$

$$x_1^2 - x_2 = 0$$

⇒ disubstitusikan

$$x_1x_2 - 2x_1 = 0$$

$$x_1 x_1^2 - 2x_1 = 0$$

$$x_1^3 - 2x_1 = 0$$

$$x_1(x_1^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \text{ or } x_1 = \pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_1^2 = x_2$$

$$0 = x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}^2 = x_2$$

$$2 = x_2$$

$$s \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}^2 = x_2$$

$$2 = x_2$$

Jadi titik ekuilibrium dari sistem, yaitu $(0, 0)^T$, $(\sqrt{2}, 2)^T$ dan $(-\sqrt{2}, 2)^T$

Stabilitas merupakan perubahan kecil dalam syarat awal yang hanya menyebabkan pengaruh kecil terhadap penyelesaian. Kestabilan asimtotik berarti bahwa pengaruh dari suatu perubahan kecil cenderung hilang sama sekali, sedangkan ketidakstabilan berarti bahwa suatu perubahan kecil dalam syarat awal mempunyai pengaruh besar pada penyelesaian (Finizio & Ladas, 1982).

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}$$
[illegible]

dinyatakan dalam matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Secara ringkas dapat ditulis $\frac{dx}{dt} = Ax$.

Misalkan akar-akar persamaan karakteristiknya yaitu λ_1, λ_2 dan λ_3 disebut nilai eigen, yang mana nilai eigen didapat dari determinan dari sistem di atas. Nilai eigen ini berfungsi untuk menentukan jenis kestabilan suatu titik kesetimbangan dari sistem. Titik kesetimbangan x_1, x_2 dan x_3 bersifat

- Stabil asimtotik, jika nilai eigen dari matriks A bernilai riil negatif,
- Stabil center, jika semua nilai eigen memiliki bagian riil bernilai nol,
- Tak stabil, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil positif.

Teorema 2.5.1 Titik kesetimbangan (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotik jika dan hanya jika nilai karakteristik dari

$$\text{Matriks } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

Analisis kestabilan dilakukan agar mengetahui laju penyebaran dari suatu penyakit, yang dilakukan pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik (Edward dkk, 2008).

Linearisasi digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial non linear dengan menggunakan persamaan linear (Campbell & Haberman, 2008), seperti:

$$\frac{dy}{dt} = h(x, y) \quad (2.2)$$

$$g(x, y) \approx g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

atau dapat ditulis seperti sistem linear dari persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = h_x(x_0, y_0)(x - x_0) + h_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (2.4)$$

$$\frac{dz}{dt} = az + bw$$

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.5)$$

Kemudian susun koefisien persamaan karakteristik menjadi:

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^n & a_0 & a_2 & a_4 \\ \lambda^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 \\ \lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^0 & q & & \end{array}$$
$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \\ b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \\ b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \end{aligned}$$

Untuk $n = 2$, kondisi *Routh-Hurwitz* adalah

Untuk $n = 3$, kondisi *Routh-Hurwitz* adalah

Untuk $n = 4$, kondisi *Routh-Hurwitz* adalah

Untuk polinomial bererajat n , maka terdapat n kondisi *Routh-Hurwitz* (Brauer, van de Driessche, Wu, 2008).

2.8. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang sudah terinfeksi bila individu yang terinfeksi tersebut masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan, digunakan sebagai parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit

Bilangan reproduksi dasar ini diperoleh dengan menentukan nilai eigen matriks jacobian pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik (Rost & Wu, 2008).

- a. Teorema kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) adalah stabil

Model SEIV pada Gambar 2.4 dapat diformulasikan sebagai berikut:

- $$\frac{dS(t)}{dt} = (1 - \rho)\pi - \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} - \mu S(t) + \omega V(t) - \rho\pi \quad (2.9)$$

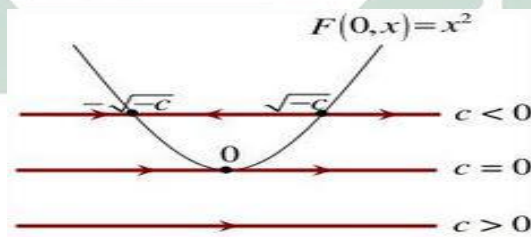
[illegible]

Bifurkasi adalah perubahan kestabilan titik kesetimbangan suatu sistem PD yang mengandung parameter dan variabel akibat berubahnya nilai parameter. Berikut merupakan jenis bifurkasi pada sistem persamaan diferensial, misal diberikan suatu persamaan diferensial $\dot{x} = F(\mu, x)$, dengan μ adalah parameter dan x adalah variabel (Rozi, 2014).

- b. $F(\mu, x)$ merupakan fungsi kuadrat

Jika fungsi F berupa fungsi kuadrat, maka terdapat jenis bifurkasi yaitu *Saddle Node* dan *Transcritical*.

- Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = c \pm x^2$



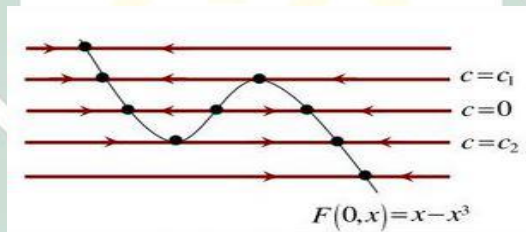
Gambar 2.6 Phase Potrait Bifurkasi *Saddle Node*

- Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = cx \pm x^2$

Jika fungsi F berupa fungsi kubik, maka terdapat jenis bifurkasi yaitu *Hysteresis*, *Subcritical Pitchfork*, *Supercritical Pitchfork* dan *Imperfect Bifurcation*

i. *Hysteresis Bifurcation*

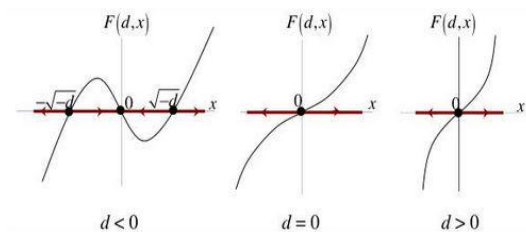
Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = c + x - x^3$



Gambar 2.8 Phase Potrait Bifurkasi *Hysteresis*

ii. *Subcritical Pitchfork Bifurcation*

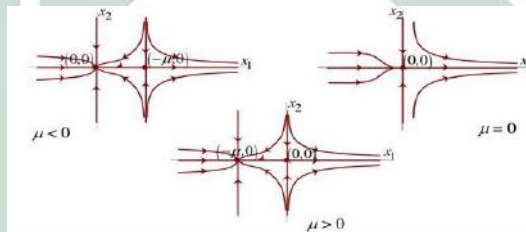
Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = dx + x^3$



Gambar 2.9 Phase Potrait Bifurkasi *Subcritical Pitchfork*

iii. *Supercritical Pitchfork Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = dx - x^3$

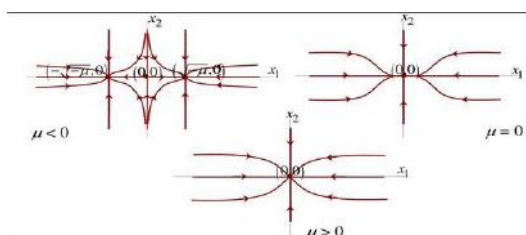


Gambar 2.13 Phase Potrait Bifurkasi *Transcritical* Dimensi Dua

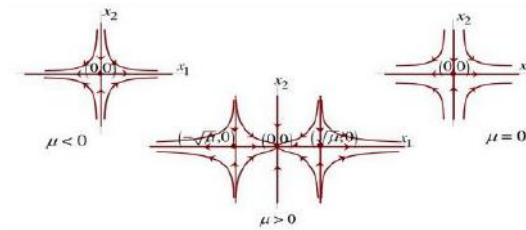
b. $F(\mu, x)$ merupakan fungsi kubik

Jika fungsi F berupa fungsi kubik, maka terdapat jenis bifurkasi yaitu *Subcritical Pitchfork* dan *Supercritical Pitchfork*

i. Subcritical Pitchfork Bifurcation

$$\dot{x}_2 = -x_2$$
[illegible]

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x}_1 = -\mu x_1 + x_1^3$
 $\dot{x}_2 = -x_2$



Gambar 2.15 Phase Potrait Bifurkasi *Supercritical Pitchfork* Dimensi Dua

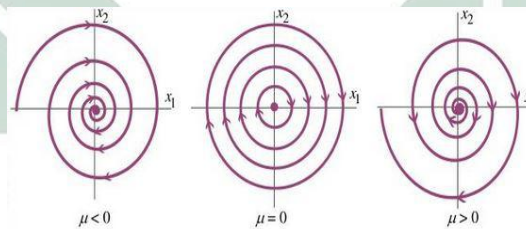
Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x}_1 = x_2 + \mu x_1$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2$$

Dalam koordinat polar, sistem berbentuk

$$\dot{r} = \mu r$$

$$\dot{\theta} = -1$$



Gambar 2.16 Phase Potrait Bifurkasi *Degenerate Hopf* Dimensi Dua

Metode Runge Kutta merupakan alternatif lain dari deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindari keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi (x, y) pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Metode Runge-Kutta adalah metode

METODE PENELITIAN

Penelitian ini termasuk ke dalam jenis penelitian kuantitatif, karena pada penelitian ini unsur perhitungan dan data penelitian berbentuk numerik atau angka.

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang berasal dari penelitian yang dilakukan oleh Kurnia Nur Pratama dalam penelitiannya yang berjudul Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIV (*Susceptible-Exposed-Infected-Vaccinated*) Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B Di Kabupaten Jember (Pratama, 2014), dalam penelitian tersebut data diambil dari Badan Pusat Statistika Kabupaten Jember dan Dinas Kesehatan Kabupaten Jember. Data-data tersebut adalah sebagai berikut:

- Data jumlah populasi di Kabupaten Jember pada tahun 2013, yaitu 2.451.081 jiwa
- Data jumlah individu yang terinfeksi hepatitis B di Kabupaten Jember pada tahun 2013, diasumsikan bahwa dalam 1 tahun setiap orang mengalami 2 kali kambuh, maka dapat dihitung dengan jumlah kasus hepatitis B dibagi 2, yaitu $\frac{2.191}{2} = 1.095$ jiwa
- Data jumlah bayi yang telah divaksin hepatitis B di Kabupaten Jember pada tahun 2013, yaitu 226.108 jiwa

- ### 3.3. Parameter

a. Laju kelahiran individu (π)

$$\pi = \frac{\text{Jumlah individu baru}}{\text{Bulan}} \quad (3.1)$$

- $$\rho = \frac{\text{Jumlah bayi tervaksin}}{\text{Jumlah kelahiran}} \quad (3.2)$$

c. Tingkat individu rentan yang terinfeksi (β)

Nilai μ ini diestimasi berdasarkan rata-rata angka harapan hidup.

$$\beta = \frac{1}{\text{Jumlah rentan} \times \text{masa pemulihan}} \quad (3.3)$$

d. Laju kematian alami (μ)

Nilai μ ini diestimasi berdasarkan rata-rata angka harapan hidup.

$$\mu = \frac{1}{63,22 \text{ tahun}} \quad (3.4)$$

e. Tingkat individu terekspose menjadi terinfeksi (σ)

$$\sigma = \frac{1}{Masainkubasi} \quad (3.5)$$

f. Tingkat individu terinfeksi yang telah sembuh menjadi individu tervaksin (γ)

$$\gamma = \frac{1}{Masa\ pemulihan} \quad (3.6)$$

g. Tingkat individu kehilangan kekebalan atau penurunan vaksin (ω)

$$\omega = \frac{1}{Masa \text{ rentan kembali}} \quad (3.7)$$

h. Tingkat karantina individu yang terinfeksi atau tindakan perlindungan pada individu rentan (φ)

$$\varphi(I) = \varphi(0) = 1 \quad (3.8)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model penyebaran suatu penyakit mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan diperoleh jika memenuhi $\frac{dS(t)}{dt} = 0, \frac{dE(t)}{dt} = 0, \frac{dI(t)}{dt} = 0$ dan $\frac{dV(t)}{dt} = 0$. Didapatkan

$$\frac{dS(t)}{dt} = (1 - \rho)\pi - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \omega V(t) - \rho\pi \quad (4.1)$$

$$S(t) = \frac{(1 - \rho)\pi + \omega V(t) - \rho\pi}{(\beta I(t) + \mu)} \quad (4.2)$$

[illegible]

dimana $\varphi(I) = \varphi(0) = 1$, sehingga menjadi

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \sigma)E(t) \quad (4.3)$$

$$0 = \beta S(t)I(t) - (\mu + \sigma)E(t)$$

$$(\mu + \sigma)E(t) = \beta S(t)I(t)$$

$$E(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{(\mu + \sigma)} \quad (4.4)$$

c. Dari $\frac{dI(t)}{dt} = 0$ ini akan diperoleh $I(t)$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - (\mu + \gamma)I(t)$$

$$0 = \sigma E(t) - (\mu + \gamma)I(t)$$

$$(\mu + \gamma)I(t) = \sigma E(t)$$

$$I(t) = \frac{\sigma E(t)}{(\mu + \gamma)} \quad (4.5)$$

d. Dari $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ ini akan diperoleh $V(t)$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \rho\pi + \gamma I(t) - (\mu + \omega)V(t)$$

$$0 = \rho\pi + \gamma I(t) - (\mu + \omega)V(t)$$

$$(\mu + \omega)V(t) = \rho\pi + \gamma I(t)$$

$$V(t) = \frac{\rho\pi + \gamma I(t)}{(\mu + \omega)} \quad (4.6)$$

Setelah didapatkan $S(t), E(t), I(t)$ dan $V(t)$ maka akan mempermudah dalam mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemiknya.

(4.12)

$$V_1 = \frac{\rho\pi + \gamma I_1}{(\mu + \omega)}$$

$$= \frac{\rho\pi + \gamma \left(\frac{(1 - \rho)\pi\sigma\beta(\mu + \omega) - \mu(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)(\mu + \omega) + \omega\rho\pi\sigma\beta - \rho\pi\sigma\beta(\mu + \omega)}{\beta((\mu + \gamma)(\mu + \sigma)(\mu + \omega) - \omega\gamma\sigma)} \right)}{(\mu + \omega)}$$

(4.13)

$$E_1 = \frac{\beta S_1 I_1}{(\mu + \sigma)}$$

$$= \frac{\beta \left(\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma \beta} \right) \left(\frac{(1 - \rho)\pi\sigma\beta(\mu + \omega) - \mu(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)(\mu + \omega) + \omega\rho\pi\sigma\beta - \rho\pi\sigma\beta(\mu + \sigma)}{\beta((\mu + \gamma)(\mu + \sigma)(\mu + \omega) - \omega\gamma\sigma)} \right)}{(\mu + \sigma)}$$

(4.14)

$$\xi_1 = (S_1, E_1, I_1, V_1)$$

Bilangan reproduksi dasar merupakan jumlah rata-rata infeksi baru yang dihasilkan oleh individu terinfeksi ke dalam populasi individu rentan (*Susceptible*). Dalam menentukan R_0 ini digunakan metode *Driessche* dan *Watmough*, yang mana metode ini menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit dan persamaan yang digunakan yaitu persamaan populasi terinfeksi sebagai berikut:

Pada persamaan di atas didapatkan matriks \mathcal{F} yang merupakan laju kemunculan infeksi baru pada populasi I dan matriks \mathcal{V} merupakan laju dari perpindahan individu keluar dari populasi I dikurangi laju dari perpindahan individu masuk ke dalam populasi I , sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta \left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu} \right] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} (\mu+\sigma) & 0 \\ -\sigma & (\mu+\gamma) \end{bmatrix}$$

$$R_0 = \frac{\beta\sigma \left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu} \right]}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)}$$

$$R_0 = \beta\sigma \left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu} \right] \times \frac{1}{(\mu^2 + \mu\gamma + \mu\sigma + \sigma\gamma)}$$

4.3. Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan

$$f_1 = (1 - \rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi \quad (4.15)$$

$$f_3 = \sigma E - (\mu + \gamma)I \quad (4.17)$$

[illegible]

Perhitungan turunan dalam matriks Jacobian di atas adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial V} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial V} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial V} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial E} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial V} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial S} &= \frac{\partial((1-\rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi)}{\partial S} = -\beta I - \mu \\ \frac{\partial f_1}{\partial I} &= \frac{\partial((1-\rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi)}{\partial I} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial E} &= \frac{\partial((1-\rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi)}{\partial E} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial V} &= \frac{\partial((1-\rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi)}{\partial V} = \omega\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial S} &= \frac{\partial(\beta SI - (\mu + \sigma)E)}{\partial S} = \beta I \\ \frac{\partial S}{\partial f_2} &= \frac{\partial(\beta SI - (\mu + \sigma)E)}{\partial(\mu + \sigma)} = -(\mu + \sigma) \\ \frac{\partial E}{\partial f_2} &= \frac{\partial(\beta SI - (\mu + \sigma)E)}{\partial(\mu + \sigma)} = \beta S \\ \frac{\partial I}{\partial f_2} &= \frac{\partial(\beta SI - (\mu + \sigma)E)}{\partial(\mu + \sigma)} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial f_2} &= \frac{\partial(\beta SI - (\mu + \sigma)E)}{\partial(\mu + \sigma)} = 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial S} &= \frac{\partial(\sigma E - (\mu + \gamma)I)}{\partial(\sigma E - (\mu + \gamma)I)} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial f_3} &= \frac{\partial(\sigma E - (\mu + \gamma)I)}{\partial(\sigma E - (\mu + \gamma)I)} = \sigma \\ \frac{\partial E}{\partial f_3} &= \frac{\partial(\sigma E - (\mu + \gamma)I)}{\partial(\sigma E - (\mu + \gamma)I)} = -(\mu + \gamma) \\ \frac{\partial I}{\partial f_3} &= \frac{\partial(\sigma E - (\mu + \gamma)I)}{\partial(\sigma E - (\mu + \gamma)I)} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial V} &= \frac{\partial(\sigma E - (\mu + \gamma)I)}{\partial V} = 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial S} &= \frac{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu + \omega)V)}{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu + \omega)V)} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial f_4} &= \frac{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu + \omega)V)}{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu + \omega)V)} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial f_4} &= \frac{\partial E}{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu + \omega)V)} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial f_4} &= \frac{\partial I}{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu + \omega)V)} = \gamma\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan hasil:

Setelah diperoleh matriks Jacobian ini, maka dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian dapat ditentukan kestabilannya. Karena pada model penyebaran suatu penyakit mempunyai dua titik kesetimbangan, oleh karena itu analisis kestabilan perlu dilakukan disetiap titik kesetimbangan, yaitu di titik kesetimbangan bebas penyakit dan di titik kesetimbangan endemik.

Analisis kestabilan akan dilakukan disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit hepatitis B. Substitusikan $(\xi_0 = (S_0, 0, 0, V_0))$ ke dalam matriks Jacobian (4.19) yang telah diperoleh, sehingga didapatkan matriks Jacobian titik kesetimbangan bebas penyakit $(J(\xi_0))$ sebagai berikut:

Setelah itu dicari persamaan karakteristik dari matriks $J(\xi_0)$ untuk memperoleh nilai eigen. Persamaan karakteristik diperoleh dengan menggunakan rumus $|J(\xi_0) -$

$$c = \omega$$

$$e = (\mu + \sigma)$$

$$f = \sigma$$

$$g = (\mu + \gamma)$$

$$j = \gamma$$

$$i = (\mu + \omega)$$

$$\begin{vmatrix} -(a+\lambda) & 0 & -b & c \\ d & -(e+\lambda) & b & 0 \\ 0 & f & -(g+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & j & -(i+\lambda) \end{vmatrix} \quad (4.23)$$
$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \lambda^3(a + e + g + i) + \lambda^2(ae + ag - bf + ai + eg + ei + gi) \\ & + \lambda(egi - abf - bdf - aeg - aei - agi - bfi) - abfi + bdfi - cdfj + aegi \end{aligned} \quad (4.24)$$
[illegible]

dengan,

$$a_2 = (ae + ag - bf + ai + eg + ei + gi),$$

$$a_1 = (a + e + g + i),$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{a_1(b_1a_3 - a_1b_2)}{b_1}$$

Pada kriteria *Routh Hurwitz* sistem dikatakan stabil jika kolom pertama pada tabel

Routh Hurwitz bernilai positif, yang berarti bahwa nilai $a_1 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3, b_1 a_3 > a_1 b_2, d_1 > 0$, dan dikatakan stabil jika nilai $R_0 > 1$.

λ^4	a_0	a_2	a_4
λ^3	a_1	a_3	
λ^2	b_1	b_2	
λ^1	c_1		
λ^0	d_1		

[illegible]

4.5. Solusi Numerik dan Simulasi

Data yang digunakan dalam simulasi ini yaitu data pada Kabupaten Jember, yaitu data jumlah populasi, jumlah individu yang terinfeksi, jumlah bayi yang telah divaksin, jumlah kelahiran dan jumlah individu rentan. Langkah awal yang dilakukan untuk mendapatkan solusi numerik model SEIV adalah dengan menentukan nilai parameter yang digunakan yaitu π , ρ , β , μ , σ , γ , ω dan φ . Dengan menggunakan Persamaan (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) dan (4.26), berikut perhitungan mencari nilai parameter:

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\text{Jumlah individu baru}}{\text{Bulan}} \\ &= \frac{36926}{12} \\ &= 3077,4 \text{ jiwa/bulan}\end{aligned}$$

e. Tingkat individu terekspose menjadi terinfeksi (σ)

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{Masainkubasi} \\ &= \frac{1}{75 \text{ hari}} \\ &= \frac{1}{2,5 \text{ bulan}} \\ &= 0,4/\text{bulan}\end{aligned}$$

1. Nilai Eigen Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

$$\lambda_1 = -0.001318$$

$$\lambda_2 = -0.141318$$

$$\lambda_3 = 0.245263461$$

$$\lambda_4 = -0.814599461$$

2. Nilai Eigen Titik Kesetimbangan Endemik

$$\lambda_1 = -325648.740632969 + 0.000000000000000i$$

$$\lambda_2 = -0.354667896470075 + 0.145471132334494i$$

$$\lambda_3 = -0.354667896470075 - 0.145471132334494i$$

$$\lambda_4 = -0.00131799999995039 + 0.000000000000000i$$

Selain itu, diperoleh juga nilai bilangan reproduksi dasar yaitu $R_0 = 3,9630 > 1$ yang berarti bahwa penyakit hepatitis B akan endemik pada Kabupaten Jember. Selanjutnya untuk melihat diagram kestabilan laju populasi dengan menggunakan metode runge kutta orde empat dengan bantuan *software MATLAB*, dimisalkan nilai

$$k_{4I} = \sigma(E_n + \hbar k_{3E}) - (\mu + \gamma)(I_n + \hbar k_{3I})$$

Pada Gambar (4.1) terlihat bahwa ketika $0 \leq t \leq 1000$ (bulan) grafik populasi *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* dan *Vaccinated* belum menuju ke arah titik kesetimbangan. Laju pertumbuhan populasi *Susceptible* mengalami kenaikan diiringi dengan penurunan pada populasi *Vaccinated*, hal ini terjadi karena adanya populasi *Vaccinated* yang kehilangan kekebalan tubuh akibatnya populasi *Vaccinated* menjadi populasi *Susceptible* kembali, setelah mencapai titik puncaknya yaitu sekitar bulan ke 300 sampai bulan ke 400 populasi *Susceptible* mengalami penurunan karena terkena infeksi virus hepatitis B yang mengakibatkan populasi *Exposed* dan *Infected* naik dan karena adanya individu yang telah tervaksin. Laju pertumbuhan populasi *Exposed* mengalami kenaikan akibat adanya populasi *Susceptible* yang terkena infeksi virus hepatitis B. Laju

endemiknya yaitu 136707, pada laju pertumbuhan populasi *Infected* bergerak naik kemudian stabil pada titik kesetimbangan endemiknya yaitu 325649, dan pada laju pertumbuhan populasi *Vaccinated* bergerak turun kemudian naik dan stabil pada titik kesetimbangan endemiknya yaitu 395251.

Berdasarkan hasil pembahasan, jika dilihat dari nilai R_0 , yaitu $R_0 = 3.9630$ yang berarti nilai $R_0 > 1$, kemudian dari titik kesetimbangan yang stabil pada titik kesetimbangan endemik dan hasil simulasi yang menunjukkan seiring berjalannya waktu populasi *Infected* konstan pada titik endemik, maka dapat disimpulkan bahwa penyakit hepatitis B akan endemik di Kabupaten Jember, setiap penderita hepatitis B yang ada pada Kabupaten Jember dapat menularkan penyakitnya kepada individu rentan maupun individu yang sehat, sehingga seiring berjalannya waktu penyakit hepatitis B ini akan menyebar luas dan jumlah penderita yang semakin banyak.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dipaparka sebelumnya, maka dapat disimpulkan:

- Hasil analisis kestabilan yang telah dilakukan, menghasilkan titik kesetimbangan endemik $\xi_1 = (285715, 13787, 3256488, 395351)$ dengan $R_0 = 3,9630 > 1$ yang berarti seiring berjalannya waktu penyakit hepatitis B pada Kabupaten Jember akan terus ada yang diiringi dengan populasi *Infected* yang terus ada meskipun jumlah populasi yang telah tervaksin lebih banyak daripada jumlah populasi yang terinfeksi.
- Bifurkasi terjadi pada sistem tak linier, pada hasil analisis keberadaan bifurkasi ini didapatkan persamaan linier $f(I) = aI - b$, dengan $a = \left(\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma} - \frac{\omega\gamma}{(\mu + \omega)} \right)$ dan $b = \frac{\mu(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma\beta}(1 - R_0)$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa sistem ini tidak terjadi bifurkasi.

5.2. Saran

1. Pada penelitian ini tidak dibahas mengenai analisis kestabilan global dari model SEIV penyakit hepatitis B.
2. Model SEIV hepatitis B ini dapat menggunakan data studi kasus di daerah yang lain.

3, 4(2).

(2018). *Pemodelan Matematika dan Studi Kestimbangan*.
Pengaruh Perilaku Merokok Menggunakan Tipe SEIR. Univ

98). *Aljabar Linier Elementer*. Terjemahan oleh Pantur S
ngga.

88). *Hepatitis B Immunization Strategies Expanded Program*
n. WHO.

de Driessche, P., Wu, J. (2008). *Mathematical Epidemiology*. I
rlag.

- 67

